Zápočtový test z MA2, varianta B **4. 12. 2017**

1. Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

na množině

$$M: \quad 0 \le x \quad \wedge \quad 0 \le y \quad \wedge \quad x + y \le 1 \ .$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení:
Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$. Zřejmě je omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).

Příklad rozdělíme (podle obrázku) na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad 0 < x \quad \wedge \quad 0 < y \quad \wedge \quad x + y < 1$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l} (y = 0 \ \ \& \ \ 0 \le x \le 1) \ \ \vee \\ (x = 0 \ \ \& \ \ 0 \le y \le 1) \ \ \vee \\ (y = 1 - x \ \ \& \ \ 0 \le x \le 1) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou tři úsečky.

Extrém na M°:

$$f' = \big(2x + 2y - 4, 2x + 8\big) = (0,0)$$

nastává právě když $(x,y) = (6,-4)$. Tento bod ale neleží v M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Na daných křivkách je nejvhodnější zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

• na první úsečce vyšetřujeme funkci

$$g_1(x) := f\big(x,0\big) = x^2 - 4x \quad \text{ pro } \quad x \in (0,1) \ .$$

Rovnice $g_1'(x) = 2x - 4 = 0$ nemá na intervalu $x \in (0,1)$ řešení, opět žádné podezřelé body nedostáváme.

• na druhé úsečce vyšetřujeme funkci

$$g_2(y) := f(0,y) = 8y \quad \text{ pro } \quad y \in (0,1) \ .$$

Ani nemusíme hledat derivaci, aby bylo jasné, že na intervalu $(0,1)$ je funkce g_2 ostře rostoucí, takže nemá žádné lokální extrémy. Opět žádné podezřelé body nedostáváme.

• na třetí úsečce vyšetřujeme funkci

$$g_3(x) := f(x,1-x) = x^2 + 2x(1-x) - 4x + 8(1-x) =$$

$$= -x^2 - 10x + 8 \quad \text{ pro } \quad x \in (0,1) \ .$$

Rovnice $g_3'(x) = -2x - 10 = 0$ nemá na intervalu $x \in (0,1)$ řešení, opět žádné podezřelé body nedostáváme.

• zbývají tedy už jen tři průsečíky křivek $(0,0)$, $(0,1)$ a $(1,0)$ s hodnotami $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 8$ a $f(1,0) = -3$, které představují jediné podezřelé body.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodě $(0,1)$ a minima v bodě $(1,0)$.

2. Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n}$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Poloměr konvergence: Můžeme využít podílové kritérium pro obecnou řadu (ne nutně mocninnou):

Mějme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, kde $\alpha_n \in \mathbb{R}$ a nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} = q$. Pokud je $0 \leq q < 1$, řada konverguje a pokud je $q > 1$, řada diverguje.

V našem případě tedy je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{2n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{x^{2n-1}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} |x^2| = |x^2|$$

Tedy řada konverguje pro $|x^2| < 1$ a diverguje pro $|x^2| > 1$, tudíž poloměr konvergence je nutně $R = 1$.

Součet: Pro $0 < |x| < 1$ platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} \; .$$

Vzniklou řadu sečteme jako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}$, kde $y := x^2$. Pak už snadno máme:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \int \frac{1}{1-y} \, \mathrm{d}y = -\ln(1-y) + C \; .$$

Po dosazení $y = 0$ dostaneme $0 = -\ln(1) + C$, tedy $C = 0$. Takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} = -\frac{\ln(1-x^2)}{x}$$

pro $|x| < 1$. Rovnost platí i pro $x = 0$, pokud pravou stranu dodefinujeme její limitou v $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\ln(1-x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \underbrace{\frac{\ln(1-x^2)}{-x^2}}_{\to 1} = 0$$

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).